KISITLI OPTİMİZASYON

EŞİTSİZLİK KISITLI ÇOK DEĞİŞKENLİ OPTİMİZASYON

Eşitsizlik kısıtlarına sahip doğrusal olmayan programlama problemlerinin çözümünde **Kuhn-Tucker şartları**ndan yararlanılır.

$$Min\ f = f(x)$$

$$g_i(x) \leq 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (***)$$

problemini ele alalım.

$x^* = (\ x_1^*\ ,\ \ x_2^*\ ,\ \ \ldots,\ \ x_n^*\ )$ noktasının, yukarıdaki problem için bir minimum nokta olabilmesi için aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır:

1) $\frac{\partial f}{\partial x_j^*} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j^*} = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$
2) $\lambda_i g_i(x^*) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$
3) $g_i(x^*) \leq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$
4) $\lambda_i \leq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$

Bu şartlara Kuhn-Tucker şartları denir. x^*-ın minimum nokta olabilmesi için bu şartların sağlanması gerekir. Ancak bu şartlar sağlandığı halde x^* noktası minimum olmayabilir. Şartların aynı zaman da yeterli olabilmesi için, amaç fonksiyonu ve kısıtların konveks(dışbükey) olması gerekir.

Bir minimizasyon probleminde,

kısıtlar $g_i \geq 0$ şeklindeyse $\lambda_i \geq 0$ olur.

Bir maksimizasyon probleminde,

kısıtlar $g_i \leq 0$ şeklindeyse $\lambda_i \geq 0$

kısıtlar $g_i \geq 0$ şeklindeyse $\lambda_i \leq 0$ olur.

Maksimizasyon problemlerinde,

amaç fonksiyonunun konkav(iç bükey), kısıtların konveks

Minimizasyon problemlerinde,

amaç fonksiyonu ve kısıtların konveks

olması ile yeterli şartlar sağlanmış olur.

NOT: (***) problemi maksimizasyon problemi olsaydı, Kuhn-Tucker şartlarında sadece $\lambda_i \geq 0$ olacak diğerleri aynı kalacaktı.

Örnek: $Max\ f(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1x_2 + 2x_1 + 4x_2$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

problemini Kuhn-Tucker şartlarını uygulayarak çözünüz.

Çözüm:

$$L(X,\lambda) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1x_2 + 2x_1 + 4x_2 - \lambda(2x_1 + 3x_2 - 6)$$

Kuhn-Tucker şartları:

1) $\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + 3x_2 + 2 - 2\lambda = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -4x_2 + 3x_1 + 4 - 3\lambda = 0$

2) $\lambda(2x_1 + 3x_2 - 6) = 0$

3) $2x_1 + 3x_2 \leq 6$

4) $\lambda \geq 0$

olur. Çözüme genellikle 2)'den başlanır.

2)'den ; $\lambda = 0$ ve $2x_1 + 3x_2 - 6 = 0$ olur.

$\boldsymbol{\lambda = 0}$ **için**: 1)'den

$-2x_1 + 3x_2 + 2 = 0$

$-4x_2 + 3x_1 + 4 = 0$

elde edilir. Bunların ortak çözümünden; $x_1 = -20$, $x_2 = -14$ bulunur.

Bu değerler 3)'ü sağlar. Kuhn- Tucker şartlarının hepsi sağlanmış oldu.

O halde, $(x_1,\ x_2) = (-20, -14)$ noktası aday çözümümüzdür. Amaç fonk. değeri: $f(x) = -58$ 'dir.

$\mathbf{2x_1 + 3x_2 - 6 = 0}$ **için:**

$x_1 = \frac{6-3x_2}{2}$ olur. Bu değer 1)'de yerine yazılırsa,

$$-2\left(\frac{6-3x_2}{2}\right) + 3x_2 + 2 - 2\lambda = 0$$

$$-4x_2 + 3\left(\frac{6-3x_2}{2}\right) + 4 - 3\lambda = 0$$

bulunur. Bunların ortak çözümünden, $x_2 = 1.086$, $\lambda = 1.257$ ve $x_1 = 1.371$ olur.

Bu değerler 3)'ü sağlar. Kuhn- Tucker şartlarının hepsi sağlanmış oldu.

$(x_1,\ x_2) = (1.371, 1.086)$ noktası da aday çözümümüzdür. Bu noktadaki amaç fonksiyonu değeri: $f(x) = 7.314$ 'tür.

Aday çözümler içinden tercih edilecek olan, amaca en uygun olanıdır. Amaç maksimizasyon olduğundan, amaç fonksiyonu değeri büyük olan çözüm optimal çözümdür. Yani verilen problemin optimal çözümü; $(x_1,\ x_2) = (1.371, 1.086)$ olarak elde edilir.

Örnek: Aşağıdaki problemi, Kuhn-Tucker şartlarını kullanarak çözünüz.

$$Min\ f(x) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2$$

$Kısıtlar$:

$$x_1^2 + 2x_2 \leq 1$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 1$$

Çözüm:

$$L(X,\lambda) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2 - \lambda_1(x_1^2 + 2x_2 - 1) - \lambda_2(2x_1 - 2x_2 - 1)$$

Kuhn-Tucker şartları:

1) $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 6x_2 - 4 - 2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 6x_1 - 2 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$

2) $\lambda_1(x_1^2 + 2x_2 - 1) = 0$

$\lambda_2(2x_1 - 2x_2 - 1) = 0$

3) $x_1^2 + 2x_2 - 1 \leq 0$

$2x_1 - 2x_2 - 1 \leq 0$

4) $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$ olur.

2)'den

$$\lambda_1 = 0 \;\; , \;\; \lambda_2 = 0 \;\; yada \;\; x_1^2 + 2x_2 - 1 = 0 \;\; , \;\; 2x_1 - 2x_2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 \neq 0 \;\; , \;\; \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \;\; , \;\; \lambda_2 \neq 0$$

$$\lambda_1 \neq 0 \;\; , \;\; \lambda_2 \neq 0$$

durumları ortaya çıkar.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 0 \;\; , \;\; \lambda_2 = 0 \;\; yada \;\; x_1^2 + 2x_2 - 1 = 0 \;\; , \;\; 2x_1 - 2x_2 - 1 = 0}$ **olsun.**

$\boldsymbol{\lambda_1 = 0 \;\; , \;\; \lambda_2 = 0}$ **ise;**

1)'den,

$2x_1 + 6x_2 = 4$

$6x_1 = 2$

elde edilir. Bunların ortak çözümünden; $x_1 = 1/3$, $x_2 = 5/9$ bulunur.

Bu değerler Kuhn- Tucker şartlarıdan 3)'ü sağlamaz. Yani kısıtları sağlamaz. Onun için çözüm olarak ALINAMAZ.

$\boldsymbol{\lambda_1 \neq 0 \;\; , \;\; \lambda_2 = 0}$ **ise;**

1) ve 2)'den,

$2x_1 + 6x_2 - 4 - 2\lambda_1 x_1 = 0$

$6x_1 - 2 - 2\lambda_1 = 0$

$x_1^2 + 2x_2 - 1 = 0$

elde edilir. Bunların ortak çözümünde, kökler sanal çıkar. Yani REEL KÖK YOKTUR.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 0}$, $\boldsymbol{\lambda_2 \neq 0}$ ise;

1) ve 2)'den,

$2x_1 + 6x_2 - 4 - 2\lambda_2 = 0$

$6x_1 - 2 + 2\lambda_2 = 0$

$2x_1 - 2x_2 - 1 = 0$

elde edilir. Bunların ortak çözümünden; $x_1 = 9/14$, $x_2 = 2/14$, $\lambda_2 = -13/14$ bulunur.

Bu değerler 3)'ü yani kısıtları sağlar. Kuhn- Tucker şartlarının hepsi sağlanmış oldu.

O halde, $(x_1,\ x_2) = (9/14,\ 2/14)$ noktası aday çözümümüzdür. Amaç fonk. değeri: $f(x) = -371/196$ 'dır.

$\boldsymbol{\lambda_1 \neq 0}$, $\boldsymbol{\lambda_2 \neq 0}$ ise;

$x_1^2 + 2x_2 - 1 = 0$

$2x_1 - 2x_2 - 1 = 0$

olur. $2x_2 = 2x_1 - 1$ alıp, $x_1^2 + 2x_2 - 1 = 0$ 'da yerine yazarsak;

$x_1^2 + 2x_1 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - 2 = 0$ elde edilir. Buradan

$x_1 = -1 \pm \sqrt{3}$ ve $x_2 = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{3}$ kökleri bulunur. Bu kökler 1)'de yerine yazılarak λ_1 ve λ_2 değerleri bulunur. Bulunacak λ_1 ve λ_2 değerlerinden en az bir tanesi > 0 çıkıyor. Bu ise Kuhn-Tucker şartlarından 4)'ü sağlamaz. O halde bu durumda da optimal çözüm YOKTUR.

Verilen problemin optimal çözümü; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ durumundaki çözüm olan $(x_1,\ x_2) = (9/14,\ 2/14)$ noktasında olup, Amaç fonk. değeri: $f(x) = -371/196$ 'dır.

SORU 1: Aşağıdaki fonksiyonun gradyant vektörünü ve Hessian matrisini oluşturunuz.

$$f(x) = 3x_1x_2^2 + 4e^{x_1x_2}$$

SORU 2: Aşağıdaki problemlerin optimal noktalarını bulunuz.

a) $\min f(x) = x_1 + x_2 + x_3$

$g_1(\mathrm{x})$: $x_1 + x_2 - 3 = 0$

$g_2(\mathrm{x})$: $x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7 = 0$

b) $\min f(x) = -3x_1^2 - 4x_2^2$

$g_1(\mathrm{x})$: $x_1 + x_2 \leq 15$

$g_2(\mathrm{x})$: $2\,x_1 + 3x_2 \leq 40$

SORU 3: Aşağıdaki foksiyonların optimal noktalarını bulunuz.

a) $f(x) = x_1 + 2x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

b) $f(x) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 + 6$